$$\begin{cases}\sqrt{2}\cos\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\\ \sqrt{2}\sin\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\\ \sin\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\end{cases}$$

3) $P(z)=z^3-2(\sqrt{3}+i).z^2+4(1+i\sqrt{3}).z-8i$

a)

Soit $\alpha\in IR$

iα *solution de l'éq* $P(z)=0\Leftrightarrow P(i\alpha)=0$

$$\Leftrightarrow -i\alpha^3-2\alpha^2\left(\sqrt{3}+i\right)+4\left(1+i\sqrt{3}\right)i\alpha-8i=0$$

$$\Leftrightarrow\left(2\alpha^2\sqrt{3}-4\alpha\sqrt{3}\right)+i\left(-\alpha^3+2\alpha^2+4\alpha-8\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2\alpha^2\sqrt{3}-4\alpha\sqrt{3}=0 & (1)\\ et\\ -\alpha^3+2\alpha^2+4\alpha-8=0 & (2)\end{cases}$$

(1) $\Leftrightarrow 2\sqrt{3}\alpha(\alpha-2)=0\Leftrightarrow \boxed{\alpha=0}$ *ou* $\boxed{\alpha=2}$ *Or* $\alpha=0$ *ne verifie pas* (2)

et $\alpha=2$ *verifie bien* (2)

d'où 2i est une solution imaginaire de l'équation P(z)=0.

b)

2i est une solution de $P(z)=0\Rightarrow P(z)=(z-2i)\left(z^2+bz+c\right)=z^3+(b-2i)z^2+(c-2ib)z-2ic$

Identifions : on aura : $\begin{cases}b-2i=-2\left(\sqrt{3}+i\right)\\ c-2ib=4\left(1+i\sqrt{3}\right)\\ -2ic=-8i\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=-2\sqrt{3}\\ c=4\end{cases}$

D'où $P(z)=(z-2i)\left(z^2-2\sqrt{3}z+4\right)$

$P(z)=0\Leftrightarrow z-2i=0$ *ou* $z^2-2\sqrt{3}z+4=0$

D'après 1) $\Leftrightarrow\begin{cases}z=2i\\ ou\\ z=\sqrt{3}+i\\ ou\\ z=\sqrt{3}-i\end{cases}$ $S_{\mathbb{C}}=\left\{2i;\sqrt{3}+i;\sqrt{3}-i\right\}$

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn